

Über die Wendel-Instabilität eines konvektionsstabilisierten Hochstrom-Hochdruck-Lichtbogens

K. Ragaller, U. Kogelschatz und W. R. Schneider

Brown Boveri-Forschungszentrum, CH-5401 Baden, Schweiz

(Z. Naturforsch. **28a**, 1321–1328 [1973]; received 5 December 1972)

Herrn Prof. H. Maecker zum 60. Geburtstag gewidmet

The Helix Instability of a Convection Stabilized High-Current, High-Pressure Arc

The helix instability of a convection stabilized high current arc burning in a high pressure nitrogen gas flow is investigated theoretically and experimentally. Equations for the electric and magnetic fields and the current density are solved in helix coordinates for small displacements. The resulting electromagnetic force on a helix segment is calculated and compared to the gasdynamic stabilizing forces. A formula is derived for the growth rate as a function of helix pitch and the physical parameters current density and gas density. The comparison with experimental data yields good qualitative agreement for the onset and the growth rate of the helix instability.

1. Einleitung

Lichtbögen neigen unter den verschiedensten Bedingungen zu einer helixförmigen Deformation, die als Wendelininstabilität bezeichnet wird^{1–3}. Diese Instabilität wurde ausführlich experimentell und theoretisch untersucht von Mentel⁴ für einen wandstabilisierten Niederstrom-Wasserstoffbogen bei Atmosphärendruck. Für diesen Fall konnten die physikalischen Mechanismen im Detail geklärt werden.

In dieser Arbeit wird eine ähnliche Untersuchung für einen stark axial angeblasenen Hochstrom-Hochdruck-Lichtbogen durchgeführt. Dieser Bogentyp hat wegen der großen technischen und wissenschaftlichen Bedeutung viel Interesse auf sich gezogen. Nach einer Klärung der physikalischen Vorgänge des stationären Zustandes dieses Bogens⁵ kann nun die erwähnte Wendelininstabilität bei diesem Bogentyp untersucht werden, die ebenfalls von großem praktischem Interesse, z.B. bei der Dimensionierung von Plasmabrennern, ist. Wie in dieser Arbeit gezeigt wird, sind es andere physikalische Effekte, die die Eigenschaften dieser Instabilität bestimmen, als im Fall der wandstabilisierten Bögen⁴.

2. Stationärer Zustand des Lichtbogens

Auf die experimentelle Anordnung wird hier nur kurz anhand von Abb. 1 eingegangen. Eine ausführliche Beschreibung findet sich in⁶.

Ein Lichtbogen von etwa 2 kA Stromstärke brennt zwischen 2 stiftförmigen Elektroden. Er wird axial

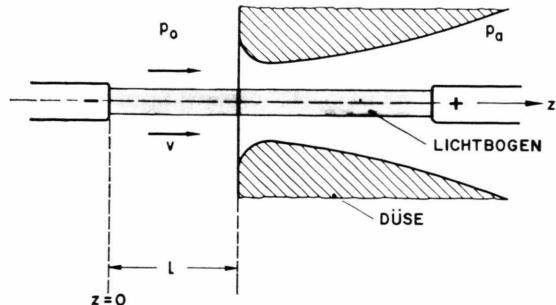


Abb. 1. Schema der Elektrodenkonfiguration in der Düsenströmung.

intensiv beblasen durch eine Strömung, die aus einem Hochdruckteil ($p_0 \approx 25$ atm N₂) durch eine Lavaldüse hindurch auf Atmosphärendruck (p_a) expandiert.

Die Wendelininstabilität wird in dem Hochdruckteil des Lichtbogens zwischen Kathode und Düsenstirnfläche erzeugt. Unsere weiteren Untersuchungen beschränken sich deshalb auf diesen Bereich. Die physikalischen Vorgänge in diesem Bogenteil werden ausführlich in⁵ beschrieben. Hier seien kurz einige für Folgende wesentliche Ergebnisse zusammengestellt:

1. Der Lichtbogen besitzt in diesem Bereich eine in sehr guter Näherung rechteckförmige radiale Temperaturverteilung. In einer sehr dünnen Grenzschicht fällt die Temperatur von etwa 25 000 K im Bogeninnern auf eine Schulter von etwa 1000 K außerhalb ab. Diese Zone wird im folgenden als Kaltgasbereich bezeichnet.

2. Die Temperaturverteilung des Lichtbogens ist zwischen Kathode und Düse in sehr guter Näherung zylindrisch ($\partial T / \partial z \approx 0$).

Sonderdruckanforderungen an Dr. K. Ragaller, Brown Boveri Forschungszentrum, CH-5401 Baden, Schweiz.



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

3. Der Bogendurchmesser wird durch die Energiebilanz bestimmt. Das axial durch die Düse abgesaugte Gas muß durch radiale Einströmung ergänzt werden. Die Joulesche Heizung wird zur Aufheizung dieses radial einströmenden Kaltgases verwendet. Bei 3 kA ergibt sich aus dieser Bilanz ein Bogendurchmesser von etwa 3 mm. Die Feldstärke beträgt dementsprechend $\approx 200 \text{ V/cm}$.

4. Die radiale Strömungsgeschwindigkeit beträgt im Kaltgas wegen der großen Dichteunterschiede zwischen Bogenkern und Umgebung nur etwa 10 m/s. Die axiale Strömungsgeschwindigkeit im Kaltgas am Bogenrand steigt vom Staupunkt vor der Kathode aus etwa linear auf $\approx 150 \text{ m/s}$ an der Düsenstirnseite an. Mit Ausnahme der unmittelbaren Umgebung des Staupunktes strömt somit das Gas am Bogenrand in guter Näherung parallel zum Lichtbogen in axialer Richtung.

3. Größenordnungsabschätzungen zur Ermittlung der physikalischen Effekte beim Auftreten der Wendelininstabilität

Entsprechend den üblichen Stabilitätsbetrachtungen wird eine kleine Deformation mit der Form der beobachteten Instabilität – in unserem Fall eine Wendel (Schraubenlinie) – vorgegeben (s. Abbildung 2). Die Untersuchung der Mechanismen, die

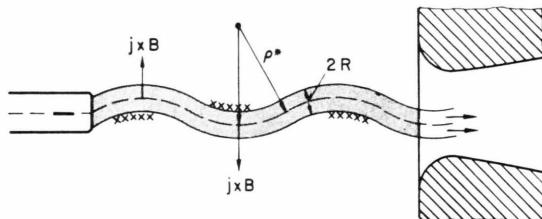


Abb. 2. Wendelnder Lichtbogen (xxxx Zonen erhöhter Joulescher Aufheizung).

die Auslenkung verstärken, und solcher, die rücktreibender Natur sind, liefert dann Aussagen über den Stabilitätsbereich und gewisse Eigenschaften der Instabilität. Vor einer mathematischen Behandlung sollen durch Größenordnungsüberlegungen die wesentlichen Effekte ermittelt werden.

3.1. Antreibende Kraft der Instabilität

Als treibende Kraft wurde in allen bisherigen Publikationen das Eigenmagnetfeld erkannt.

Auf das leitfähige Plasma wirkt im helixförmig deformierten Zustand eine magnetische Kraft

$\mu_0 \mathbf{j} \times \mathbf{H}$, die integriert über den Querschnitt des Bogens eine in Richtung der Auslenkung resultierende Komponente besitzt (s. Abbildung 2).

Die magnetische Kraft auf das Plasma führt zu einer Bewegung (Strömung) des Plasmas in Kraftrichtung. Diese Bewegung des Plasmas ist jedoch i. a. nicht mit einer Bewegung der Lichtbogensäule identisch^{7,8}. Durch Aufheizung von Kaltgas und Abkühlung von Plasma kann eine Relativbewegung von Isothermen (Lichtbogen) und Kaltgas auftreten, so daß der Lichtbogen als Pumpe wirkt und das Kaltgas durch sich hindurchpumpt.

In dem von Mentel⁴ untersuchten Fall spielt diese Relativbewegung von Bogen und Kaltgas eine dominierende Rolle. Sie ist dort gleich groß wie die Strömungsgeschwindigkeit, so daß die Instabilität zu einem stationären, ausgelenkten Zustand führt. Die Isothermenwanderung relativ zum Kaltgas kommt durch folgende Effekte zustande:

Auf der konkaven Seite: Erhöhte Joulesche Heizung wegen der dort erhöhten Feldstärke; vergrößerter Wärmestrom ins Kaltgas hinein wegen der Deformation der Bogensäule.

Auf der konvexen Seite: Erhöhte Wärmeabfuhr zur Wand, verringelter Wärmestrom ins Kaltgas hinein.

Mit Ausnahme der Wärmeleitung zur Wand treten diese Effekte im Prinzip auch in unserem Fall auf. Zur Ermittlung der Lage des Lichtbogens im Fall der Wendelininstabilität ist deshalb zunächst eine Abschätzung der Relativbewegung von Bogen und Kaltgas erforderlich.

3.2. Abschätzung der Relativbewegung zwischen Lichtbogen (Isothermen) und Kaltgas

Nach den vorherigen Überlegungen müssen wir die Energiebilanz des ausgelenkten Bogens diskutieren und abschätzen, wie groß die Relativbewegung von Lichtbogen und Kaltgas – bedingt durch die von der Instabilität hervorgerufene Unsymmetrie – ist.

Wie im folgenden gezeigt wird, liegen die Zeitkonstanten für das Anwachsen der Instabilität in der Größenordnung 0,1 ms.

Die hohe axiale Strömungsgeschwindigkeit im Plasma von $O(1000 \text{ m/s})$ führt zu einer Zeitkonstante für die Einstellung der unter 2. erwähnten Energiebilanz von 0,01 ms. Das heißt, die Energiebilanz ist auch bei dem wendelförmigen ausgelenkten Bogen im Gleichgewicht, ebenso der aus dieser

Bilanz resultierende Bogendurchmesser, der nur schwach ($\sim l^{1/4}$) von der Bogenlänge l abhängt.

Der wendelnde Bogen besitzt deshalb in guter Näherung einen von der Auslenkung unabhängigen Bogendurchmesser (s. Abbildung 2).

Die während der Instabilität aufgeprägte Energiebilanz liefert uns eine Abschätzung für die Wandergeschwindigkeit des Lichtbogens infolge unsymmetrischer Energiebilanz.

Ein mit dem Krümmungsradius ϱ^* gekrümmter Bogen (s. Abb. 2) heizt vermehrt auf der konkaven Seite das Gas auf. Dadurch wandert der ausgelenkte Lichtbogen, wenn wir von den magnetischen Kräften absehen, zur Achse zurück.

Die Geschwindigkeit, mit der dies geschieht, kann grob wie folgt abgeschätzt werden:

Der Feldstärkeunterschied zwischen konkaver und konvexer Seite beträgt bei kleinen Krümmungen

$$\Delta E/E = 2 R/\varrho^*.$$

Im nichtausgelenkten Bogen wird pro Längeneinheit IE zur Aufheizung von radial einströmendem Kaltgas aufgebracht. Dies führt zu der oben erwähnten radialem Strömungsgeschwindigkeit von $\approx 10 \text{ m/s}$.

Wird im ausgelenkten Bogen das zusätzliche $I \Delta E$ voll zur einseitigen Aufheizung des Gases auf der konkaven Seite aufgebracht, so resultiert eine damit verbundene Relativgeschwindigkeit Bogen – Kaltgas von der Größenordnung

$$O(10 \text{ m/s}) \Delta E/E = O(10 \text{ m/s}) 2 R/\varrho^*.$$

Diese Größenordnung ist auch für die größten beobachteten Auslenkungen wesentlich kleiner als die Anwachsraten der Instabilität.

Diese Tatsache ist ein wesentlicher Unterschied zu der von Mentel⁴ untersuchten Instabilität. Der physikalische Unterschied zu⁴ liegt einerseits in den wesentlich größeren magnetischen Kräften als Folge der hohen Stromstärke und den damit verbundenen schnellen Anwachsraten, andererseits in der als Folge der hohen Gasdichte auch bei hoher Energiezufuhr nur geringen Relativbewegung von Bogen und Kaltgas.

Da die Relativbewegung von Bogen und Kaltgas bei der Instabilität von untergeordneter Bedeutung ist, sind auch die in⁴ beobachteten stationären, ausgelenkten Zustände nicht möglich. Die Instabilität ist vielmehr ein instationärer Anfachungsvorgang.

3.3. Hemmende Kräfte für das Anwachsen der Instabilität

Nach dem Vorherigen führen die magnetischen Kräfte zu einer beschleunigten Bewegung der gesamten Bogensäule ohne Querschnittsänderungen durch das kalte Gas hindurch. Diese Bewegung wird durch gasdynamische Kräfte gehemmt. Hierfür kommen Reibungs- und Trägheitskräfte in Frage.

Da wir uns für die Stabilitätsgrenzkurve interessieren, können wir unsere Betrachtung auf kleine Auslenkungen bzw. kurze Anwachsraten beschränken.

Da die Reibungskräfte proportional zur Geschwindigkeit der Bogensäule sind, die Trägheitskräfte jedoch proportional zur Beschleunigung und die Geschwindigkeit zu Beginn Null ist, nicht dagegen die Beschleunigung, kann die Reibung vernachlässigt werden.

Die Trägheitskräfte werden bestimmt durch die Trägheit des umgebenden kalten Gases. Demgegenüber kann die Trägheit des Bogenplasmas wegen der um 2 Größenordnungen niedrigeren Massendichte vernachlässigt werden.

3.4. Konvektive Stabilisierung durch die axiale Strömung

Die bisher diskutierten Effekte sind nicht in der Lage, einen einmal ausgelenkten Bogen wieder in die Achse zurückzuführen, wie dies innerhalb des Stabilitätsbereichs der Fall sein muß. Beim wandstabilisierten Bogen⁴ ist es die in unserem Fall als unbedeutend (s. 3.2.) erkannte Isothermenwanderung als Folge unsymmetrischer Heizung und Kühlung.

Der maßgebliche Effekt in unserem Fall ist die axiale Strömung des kalten Gases. Ein helixförmig verformter Lichtbogen wird von dieser Strömung konvektiv mitgenommen. Wenn die Anwachszeitkonstante der Instabilität klein ist gegen die Aufenthaltszeit im Beobachtungsbereich, dann wird ein stabiler Bogen beobachtet. Nur wenn während der Verweilzeit meßbare Amplituden erreicht werden, kann von einem instabilen Bogen gesprochen werden.

Das *Stabilitätskriterium* besteht somit aus einem Vergleich von Anwachsraten, die durch magnetische Kräfte einerseits und gasdynamischen Widerstand andererseits gegeben ist, und der Verweilzeit des deformierten Bogens im interessierenden Bereich.

4. Linearisierte mathematische Beschreibung

Die oben formulierten physikalischen Effekte werden nun quantitativ mit den Methoden der linearen Stabilitätstheorie untersucht. Dabei sind noch zwei allgemeine Voraussetzungen zu treffen, die im Experiment nur angenähert erfüllt sind:

- die vorgegebene wendelförmige Deformation wird als unendlich lang in axialer Richtung angenommen;
- das kalte Gas in der Umgebung des Bogens ruht oder strömt mit konstanter Geschwindigkeit in axialer Richtung.

Dem unter 6. durchgeführten Vergleich von Rechnung und Messung kommt wegen dieser Annahmen nur qualitativer Charakter zu.

4.1. Koordinatensystem

Entsprechend der beobachteten helixförmigen Gestalt der Instabilität empfiehlt es sich, Helixkoordinaten einzuführen:

$$\begin{aligned} x &= a \cos \varphi + r(\cos \psi \cos \varphi - (b/c) \sin \psi \sin \varphi), \\ y &= a \sin \varphi + r(\cos \psi \sin \varphi + (b/c) \sin \psi \cos \varphi), \\ z &= b \varphi - (a/c) r \sin \psi. \end{aligned} \quad (1)$$

Dabei ist b die reduzierte Ganghöhe

$$b = \lambda/2 \pi, \quad (2)$$

a ist die Helixamplitude und $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Das Bogeninnere ist der Bereich $0 \leq r \leq R$. Die Helixachse ist durch $r = 0$ gegeben. \mathbf{n} sei der Tangenteneinheitsvektor in Richtung Helixachse.

r und ψ sind Polarkoordinaten in Ebenen $\varphi = \text{const.}$ senkrecht zu \mathbf{n} . Der Einheitsvektor in Richtung $\psi = 0$ sei mit \mathbf{e} bezeichnet.

Für die folgende Rechnung verwenden wir je nach Zweckmäßigkeit die Basis

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \mathbf{e} & \text{oder} & \mathbf{e}_3 = \mathbf{n}, \\ \mathbf{e}_2 &= \mathbf{n} \times \mathbf{e} & \mathbf{e}_4 &= \mathbf{e}_1 \cos \psi + \mathbf{e}_2 \sin \psi, \\ \mathbf{e}_3 &= \mathbf{n} & \mathbf{e}_5 &= -\mathbf{e}_1 \sin \psi + \mathbf{e}_2 \cos \psi, \end{aligned} \quad (3)$$

Diese Vektoren sind in Abb. 3 dargestellt.

Für die folgenden Ableitungen benutzen wir die üblichen Abkürzungen der Differentialgeometrie:

Metrischer Tensor

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & \frac{b}{c} r^2 \\ 0 & \frac{b}{c} r^2 & A \end{pmatrix} \quad (4)$$

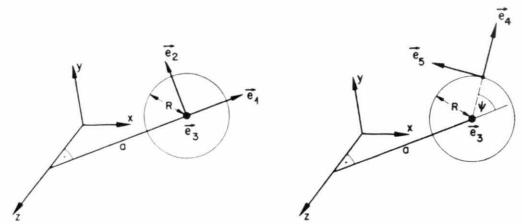


Abb. 3. Skizze der verwendeten Koordinatensysteme.

mit

$$A = c^2 + r^2 \cos^2 \psi + (b^2/c^2) r^2 \sin^2 \psi + 2 a r \cos \psi. \quad (5)$$

Ferner wird

$$B(r, \psi) = \sqrt{\det G} = r(c + (a/c)r \cos \psi) \quad (6)$$

benötigt.

4.2.1. Berechnung des elektrischen Feldes

Die Deformation der Bogensäule führt zu einer Veränderung des elektrischen Feldes und entsprechend dem Ohmschen Gesetz

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (7)$$

zu einer veränderten Stromverteilung, die zunächst bekannt sein muß, bevor das Magnetfeld \mathbf{H} und die magnetische Kraftdichte $\mu_0 \mathbf{j} \times \mathbf{H}$ berechnet werden können.

E folgt mit $\mathbf{E} = -\nabla \tilde{\varphi}$ aus der Lösung der Laplace-Gleichung

$$\Delta \tilde{\varphi} = 0. \quad (8)$$

Gleichung (8) ist im Inneren und Äußeren des helixförmig deformierten Lichtbogens zu lösen. Am Bogenrand sind folgende Randbedingungen zu erfüllen:

- Stetigkeit von $\tilde{\varphi}$.
- Verschwinden der Normalkomponente des elektrischen Feldes an der Bogenoberfläche auf der leitfähigen Seite [$E_4(R) = 0$].

4.2.2. Berechnung des Magnetfeldes

$$\text{Mit } \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} \quad (9)$$

$$\text{und } \operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \quad (10)$$

folgt für den nicht leitfähigen Bereich:

$$\mathbf{H} = \nabla \operatorname{grad} U \quad (11)$$

$$\text{und } \Delta U = 0. \quad (12)$$

Innerhalb des Bogens gilt wegen $\sigma = \text{const}$ und $\text{rot } \mathbf{E} = 0$:

$$\text{rot rot } \mathbf{H} = 0. \quad (13)$$

In kartesischen Koordinaten folgt hieraus mit (10)

$$\Delta H_x = \Delta H_y = \Delta H_z = 0 \quad (14)$$

wegen der Vektoridentität

$$\text{rot rot } \mathbf{H} = \text{grad div } \mathbf{H} - \Delta \mathbf{H}. \quad (15)$$

Aus (12) und (14) können die 3 Komponenten des Magnetfeldes innen und außen berechnet werden. Die Lösungen beider Bereiche sind durch die Randbedingung zu verknüpfen, daß alle Feldkomponenten auf beiden Seiten gleich sind (Stetigkeit).

4.2.3. Berechnung des Strömungsfeldes

Wie unter 3.3. begründet wurde, wird die Anwachsraten der Instabilität durch die erforderliche Beschleunigung des kalten Gases außerhalb des Lichtbogens mitbestimmt. Zur Berechnung dieses Strömungswiderstands ist zunächst das Strömungsfeld zu ermitteln. Da wir nach obigem reibungsfrei rechnen dürfen, gelten, solange die Geschwindigkeit klein gegen Schallgeschwindigkeit ist, die Gesetze der Potentialströmung

$$\mathbf{v} = \text{grad } \Psi, \quad \Delta \Psi = 0. \quad (16)$$

Randbedingung für die Lösung von (16) im Außenraum ist, daß die Auslenkungsgeschwindigkeit des gesamten Bogens, die gegeben ist durch

$$\mathbf{w} = \dot{a} \mathbf{e}_1 \quad (17)$$

an der Oberfläche der Helix gleich der dortigen Strömungsgeschwindigkeit ist (s. 3.2.).

4.3. Lösungsverfahren für die Laplace-Gleichung

Die obigen Gleichungen mit Randbedingungen sind in dem angegebenen Helix-Koordinatensystem zu lösen. Dabei wird die Lösung in linearer Näherung für kleine Auslenkungen a entsprechend den üblichen Methoden der Stabilitätstheorie berechnet. Hier werden nur einige Zwischenschritte skizziert.

Der Laplace-Operator lautet:

$$\Delta = \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial r} B \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \psi} B \frac{\partial}{\partial \psi} - \frac{b r^2}{c} \frac{1}{B} \frac{\partial B^{-1}}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi} - 2 \frac{b r^2}{c B^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi \partial \varphi} + \frac{r^2}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (18)$$

Im Rahmen der linearen Näherung werden die Potentiale in eine Potenzreihe nach der Auslenkung a entwickelt:

$$\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}^0 + a \tilde{\varphi}^1 + \dots, \quad (19)$$

wobei neben der bekannten Lösung für Auslenkung 0 nur noch das Glied 1. Ordnung interessiert. Aus der Symmetrie des Problems ergibt sich, daß die Störpotentiale nur von r und ψ abhängen:

$$\tilde{\varphi}^1 = W^1(r, \psi). \quad (20)$$

Damit vereinfacht sich Gl. (18) zu:

$$\left(\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial r} B \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \psi} B \frac{\partial}{\partial \psi} \right) W^1(r, \psi) = Q(r, \psi) \quad (21)$$

$Q(r, \psi)$ ist dabei der a proportionale Anteil von $\tilde{\varphi}^0$.

Die Lösung von Gl. (21) setzt sich zusammen aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung, für die gilt:

$$W_0^1(r, \psi) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n^1 I_n \left(n \frac{r}{b} \right) + A_n^2 K_n \left(n \frac{r}{b} \right) \right) \cos(n \psi) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n^1 I_n \left(n \frac{r}{b} \right) + B_n^2 K_n \left(n \frac{r}{b} \right) \right) \sin(n \psi), \quad (22)$$

sowie einer speziellen Lösung der inhomogenen Gl. (21), die man wegen der einfachen Form der $Q(r, \psi)$ in unserem Fall für alle 3 Potentialgleichungen durch direkte Integration gewinnen kann. Dabei sind I_n und K_n modifizierte Besselfunktionen.

Die Bestimmung der Integrationskonstanten in Gl. (22) erfolgt durch die oben angegebenen Randbedingungen sowie der Forderung endlicher Werte der Lösung und Nullwerden im Unendlichen.

4.4. Ergebnisse für die Felder in 1. Näherung

Damit erhält man folgende Ergebnisse für die erste Näherung:

Stromverteilung:

$$j_3^1 = -\sigma E \frac{I_1 \left(\frac{r}{b} \right)}{b I_1' \left(\frac{r}{b} \right)} \cos \psi, \\ j_{41} = -\sigma \frac{E}{b} \left(1 - \frac{I_1' \left(\frac{r}{b} \right)}{I_1 \left(\frac{r}{b} \right)} \right) \sin \psi, \\ j_5^1 = -\sigma \frac{E}{b} \left(1 - \frac{b}{r} \frac{I_1 \left(\frac{r}{b} \right)}{I_1' \left(\frac{r}{b} \right)} \right) \cos \psi, \quad (23)$$

Magnetfeld: $r \leq R$

$$H_3^1 = j \left(\frac{r}{2b} - \frac{K_1 I_1}{I_1'} I_1 \left(\frac{r}{b} \right) \right) \cos \psi, \quad (24)$$

$$H_4^1 = j \left(\frac{1}{2} + \frac{K_1 I_1}{I_1'} I_1' \left(\frac{r}{b} \right) - \frac{1}{I_1'} I_1 \left(\frac{r}{b} \right) \frac{b}{r} \right) \sin \psi,$$

$$H_5^1 = j \left(\frac{1}{2} + \frac{K_1 I_1}{I_1'} I_1 \left(\frac{r}{b} \right) \frac{b}{r} - \frac{1}{I_1'} I_1' \left(\frac{r}{b} \right) \right) \cos \psi.$$

Geschwindigkeitspotential $r \geq R$

$$\Psi^1 = (\dot{a} b / K_1') K_1(r/b) \cos \psi. \quad (25)$$

Die unterdrückten Argumente der Bessel-Funktionen sind jeweils R/b .

5. Ergebnisse

5.1. Bewegungsgleichung, Anwachsraten

Entsprechend dem oben formulierten physikalischen Bild wird nun die integrale Impulsbilanz für ein Scheibchen der Dicke $d\varphi$ des Bogens aufgestellt.

Die resultierende magnetische Kraft ergibt sich durch Integration der Kraftdichte $\mu_0 \mathbf{j} \times \mathbf{H}$ über die Querschnittsfläche:

$$K_m = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^R dr \mu_0 \mathbf{j} \times \mathbf{H} B(r, \psi), \quad (26)$$

wobei bei der Produktbildung $\mathbf{j} \times \mathbf{H}$ wiederum nur in a lineare Terme berücksichtigt werden und $B(r, \psi)$ in Gl. (6) definiert wurde. Eine resultierende Kraft ergibt sich nur in der Richtung \mathbf{e}_1 :

$$K_{m1} = \mu_0 j^2 \pi R^2 b \Phi(y) a \quad (27)$$

mit

$$\Phi(y) = -\frac{y^2}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{y I_1'(y)} \cdot [\frac{1}{2} y I_2(y) + (1 - I_1(y) K_1(y)) I_1(y)]. \quad (28)$$

Dabei wurde $y = R/b$ eingeführt.

Entsprechend wird der gasdynamische Widerstand K_g durch Integration der Druckkräfte über die Oberfläche des Bogens für ein Scheibchen der Dicke $d\varphi$ gewonnen. Bekanntlich⁹ liefern die stationären Terme der Potentialströmung keinen Beitrag zu K_g .

Der einzige Beitrag kommt von dem instationären Druck p_i , der sich durch das Geschwindigkeitspotential nach Gl. (15) ausdrücken lässt:

$$p_i = -\varrho (\partial \Psi / \partial t). \quad (29)$$

Nach Gl. (25) folgt daraus:

$$p_i = -\varrho (\partial \Psi^1 / \partial \dot{a}) \ddot{a}. \quad (30)$$

Schließlich gilt dann:

$$K_g = \int_0^{2\pi} d\psi p_i \mathbf{e}_4 B(R, \psi) \quad (31)$$

mit B nach Gleichung (6).

Die Auswertung von Gl. (31) liefert

$$\mathbf{K}_g = -\pi R^2 b \varrho \ddot{a} (K_1(y)/y K_1'(y)) \mathbf{e}_1. \quad (32)$$

Aus dem Gleichgewicht der magnetischen und der gasdynamischen Kraft folgt die Bewegungsgleichung für den instabilen Lichtbogen:

$$\ddot{a} = \frac{\mu_0 j^2}{\varrho} \frac{\Phi(y)}{K_1(y)} a = \zeta^2 a, \quad (33)$$

$$\zeta = j \sqrt{\frac{\mu_0}{\varrho}} \sqrt{F(y)} \quad (34)$$

mit

$$F(y) = (\Phi(y)/K_1(y)) y K_1'(y). \quad (35)$$

ζ hat die Bedeutung einer reziproken Zeitkonstante für das durch Gl. (33) bei realem ζ gegebene exponentielle Wachstum der Instabilität.

5.2. Diskussion der Anwachsraten

Die Funktion $F(y)$ beschreibt die Abhängigkeit der Anwachsraten von der Ganghöhe der Wendel, denn es gilt:

$$y = R/b, \quad b = \lambda/2\pi. \quad (36)$$

In Abb. 4 ist die Funktion $F(y)$ dargestellt. Wichtig ist, daß sie ein Maximum bei einer bestimmten Ganghöhe durchläuft. Wendeln der entsprechenden Ganghöhe sind am instabilsten und sind deshalb experimentell zu erwarten. In Abb. 4 ist außerdem noch $\Phi(y)$ eingetragen. Diese Funktion

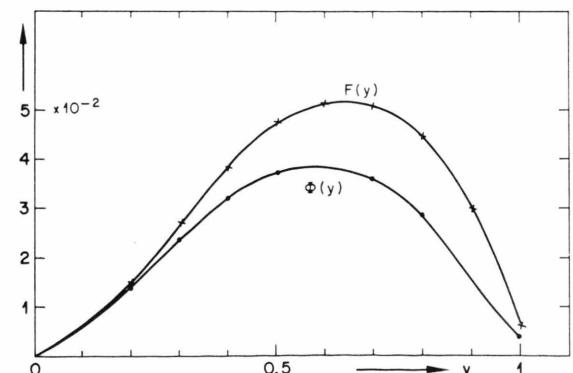


Abb. 4. Berechneter Verlauf der Funktionen $F(y)$ und $\Phi(y)$, die die Anwachsraten und die magnetische Kraft beschreiben.

gibt die Wellenlängenabhängigkeit der magnetischen Kraft allein an. Der ähnliche qualitative Verlauf zeigt an, daß die magnetische Kraft für die Ausbildung des Maximums verantwortlich ist. Die gasdynamische Kraft bewirkt lediglich eine geringfügige Verschiebung des Maximums.

Dem Maximum der Kurve von $F(y)$ entspricht ein Verhältnis von Ganghöhe zu Bogendurchmesser von

$$\lambda/D \approx 5.$$

Wichtig für praktische Anwendungen ist ferner die durch Gl. (34) gegebene Abhängigkeit von den physikalischen Größen.

Die Anwachsrate hängt demnach von der Stromdichte ab und nur über diese Größe von Strom und Bogenradius. Darüber hinaus besteht nur noch eine Abhängigkeit von der Kaltgasdichte, die über den gasdynamischen Widerstand hereinkommt.

6. Vergleich von Theorie und Experiment

Die Ergebnisse der Stabilitätsrechnung werden nun mit experimentellen Beobachtungen verglichen, die in der Anordnung nach Abb. 1 bzw. nach 5 gewonnen wurden. Der Vergleich ist, wie schon unter 4. erwähnt, qualitativer Natur.

6.1. Experimentelle Beobachtungen der Instabilität

Die physikalischen Parameter, bei denen experimentiert wurde, sind bereits unter 2. erwähnt worden.

Bei einem Abstand von Kathode zur Düsenstirnseite l (s. Abb. 1) von 8 mm und weniger erhält man einen vollkommen stabilen Lichtbogen in diesem Bereich. Vergrößert man l über etwa 10 mm hinaus, dann treten Instabilitäten der Bogensäule auf.

Von diesem Zustand wurden Filmaufnahmen mit 3 μs Belichtungszeit und 30 μs Bildabstand angefertigt.

Abbildung 5 zeigt 3 aufeinanderfolgende Bilder eines solchen Films. Gut zu erkennen ist die wendelförmige Gestalt, wenn auch die Instabilität schon eine solche Intensität erreicht hat, daß der Bogenrand durch weitere Instabilitäten aufgefächert und zerfranst wird.

In Abb. 6 ist eine Serie solcher Aufnahmen zeichnerisch nebeneinandergesetzt, um die Bewegung der Wendel verfolgen zu können. Man erkennt klar, daß die Störung in Strömungsrichtung wandert.

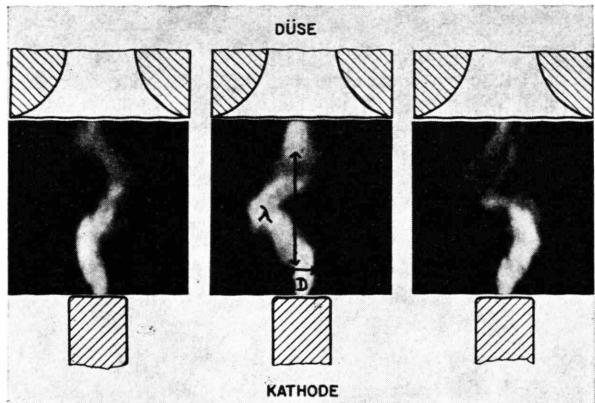


Abb. 5. Photographische Aufnahmen eines wendelnden Lichtbogens (Bildabstand: 60 μs).

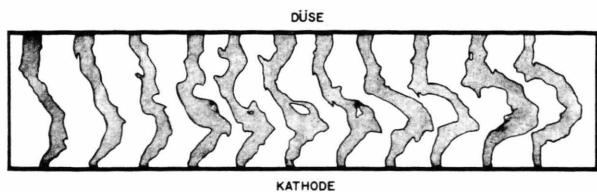


Abb. 6. Nachgezeichnete Lichtbogenserie zur Demonstration der Bewegung der Wendel in Strömungsrichtung.

Abbildung 7 zeigt die Auswertung der Mitnahmgeschwindigkeit für einzelne markante Störungen. Es ergibt sich ein zur Düse ansteigender Verlauf, der etwa den rechnerischen Werten für die Strömungsgeschwindigkeit von 5 entspricht. Die relativ starke Streuung ist auf den sehr instabilen Strömungszustand zurückzuführen.

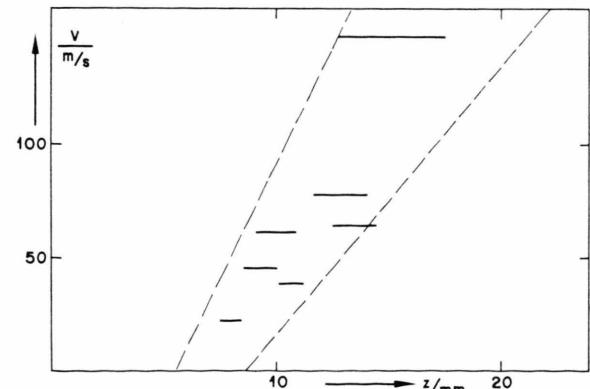


Abb. 7. Aus Schnellbildserien ermittelte Strömungsgeschwindigkeiten.

6.2. Vergleich mit der Theorie

Die Aussagen der Theorie über Ganghöhe, Anwachsrate und daraus folgender Stabilitätsbereich

sowie Abhängigkeit von physikalischen Parametern werden nun soweit möglich mit den experimentellen Beobachtungen verglichen.

Obwohl die beobachteten Instabilitäten bereits eine Amplitude erreicht haben, die außerhalb des Gültigkeitsbereich der linearen Theorie liegt, paßt das beobachtete Verhältnis von Ganghöhe zu Bogendurchmesser gut zu dem berechneten Wert 5. In Abb. 5 sind entsprechende Markierungen für Ganghöhe und Bogendurchmesser im Verhältnis 5:1 eingezeichnet.

Zur Abschätzung der Stabilitätsgrenze ist zunächst $1/\zeta$ nach Gl. (34) zu berechnen. Mit $R = 1,7 \text{ mm}$, $I = 1,8 \cdot 10^3 \text{ A}$, $\rho = 8 \text{ kg/m}^3$ erhalten wir

$$1/\zeta = 0,15 \text{ ms.}$$

Die Zeitkonstante ist zu vergleichen mit der Verweilzeit τ der Bogensäule im Beobachtungsbereich: $\tau = l/\bar{v}$, wobei \bar{v} die mittlere Geschwindigkeit der Kaltgasströmung in diesem Bereich ist. Diese kann nach⁵ zu etwa 70 m/s eingesetzt werden.

Daraus resultiert eine Abschätzung für dasjenige l , bei dem die Instabilität beginnt:

$$l = 70 \text{ m/s} \cdot 0,15 \text{ ms} \approx 10 \text{ mm.}$$

Angesichts des erwähnten qualitativen Charakters dieses Vergleichs ist das eine recht gute Übereinstimmung.

¹ H. Maecker, Fortschritte in der Bogenphysik in: Proc. Fifth Int. Conf. on Ionization Phenomena in Gases, Munich 1961, S. 1793.

² W. Finkelnburg, Hochstromkohlebogen, Springer-Verlag, Berlin 1948.

³ S. Witkowski, Z. angew. Phys. **11**, 135 [1959].

⁴ J. Mentel, Z. Naturforsch. **26 a**, 526 [1971].

⁵ W. Hermann, U. Kogelschatz, K. Ragaller u. E. Schade, zur Veröff. eingereicht bei Phys. Fluids.

Als weiterer Punkt der Übereinstimmung kann angeführt werden, daß die experimentell beobachtete Grenze für Stabilität bzw. Instabilität nicht vom Strom abhängt. Dies ist zu erwarten, da bei diesem Bogentyp bei einer Stromänderung die Stromdichte praktisch konstant bleibt⁵ und nur diese Größe in die Stabilitätstheorie eingeht.

7. Schlußbemerkung

Die qualitative Übereinstimmung von linearer Rechnung und Experiment bezüglich einiger Eigenschaften der Wendelininstabilität des axial angeblasenen Lichtbogens zeigt, daß die Theorie die wesentlichen Effekte beinhaltet und von einem richtigen physikalischen Bild ausgeht.

Der physikalische Mechanismus ist anders als bei den von Mentel untersuchten wandstabilisierten Niederstrombögen bei Atmosphärendruck. Unsymmetrische Heizung und Kühlung spielen dort eine entscheidende Rolle, Trägheitskräfte, die in unserem Fall dominieren, können vernachlässigt werden. Ziel zukünftiger Arbeiten könnte sein, den Zwischenbereich, in dem beide Effekte wichtig sind, zu klären.

Herrn E. H. Newman danken wir für seine Mithilfe bei der Durchführung und Auswertung der Experimente.

⁶ W. Bötticher, U. Kogelschatz u. E. Schade, Z. Naturforsch. **27 a**, 1433 [1972].

⁷ H. Maecker, Proc. IEEE **59**, 439 [1971].

⁸ K. Ragaller, W. R. Schneider u. W. Hermann, Z. Angew. Math. Phys. **22**, 920 [1971].

⁹ L. D. Landau u. E. M. Lifshitz, Lehrbuch der Theoret. Physik Bd. 6, Akademie-Verlag, Berlin 1971, 534 ff.